



TITLE:

数の概念の捉え方について (数学教師に必要な数学能力に関連する諸問題)

AUTHOR(S):

平井, 安久; 青山, 陽一; 曾布川, 拓也

CITATION:

平井, 安久 ...[et al]. 数の概念の捉え方について (数学教師に必要な数学能力に関連する諸問題). 数理解析研究所講究録 2013, 1828: 86-100

ISSUE DATE:

2013-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194794>

RIGHT:

数の概念の捉え方について

岡山大学 教育学部 平井 安久 (Yasuhisa HIRAI)
Faculty of Education, Okayama University

島根大学 教育学部 青山 陽一 (Yoichi AOYAMA)
Faculty of Education, Shimane University

岡山大学 教育学部 曾布川 拓也 (Takuya SOBUKAWA)
Faculty of Education, Okayama University

1 はじめに

小学校算数科における『理解』とは、「直観的／直感的にわかる」ことである。特に定義・公理においてこれは重要である。数学者にとってはどんな定義・公理であろうと、それを仮定して議論を進めることが出来ると言っているだろうが、小学生にとっては定義・公理そのものがわかることが必要である。本稿では算数・数学の基本である「数概念の理解」と、それに関連する意味での「数と演算」について考察し、小学校算数科の指導に資するための見方を提案する。

2 基本的な数の概念（見方）

数概念の基本は自然数である。数学の世界では何らかの公理系によって自然数の集合に意味を与える。続いて自然数のある特定の部分集合(自然数列を有限項で打ち切ったもの)と1対1対応を付けることによって「数える」「測る・計る」という概念を得る。数学者にとってはそれだけのことであるが、それを「わかる」ためにはこの概念を掘り下げて考えなくてはならない。まず小学校低学年までで重視されるのが、次の3つの見方である。

(1) 順序としての見方（順序数）

自然数列の最初から順に1対1対応を付けていくとき、数える対象がどの自然数に対応するかによって、その対象が「○番目」とあるという見方をする。ここで注目すべきは、対応する自然数には単位がつかない（無名数）であるということである。

(2) 個数としての見方（基数）

自然数列を有限項で打ち切ったものと対象となるものの集合に全単射対応が付けたとき、数列の最終項の数をその対象の個数とみる。この見方については、以下のようなことに留意して指導が行われる。

- 小学校初年においては、順序としての見方と個数としての見方が混同されがちであるが、基数としての見方が深まっていくに従って分離してくる。この

分離については後に述べる演算において、例えば「数え足し」が必要とされているかどうかの一つの大きな判断基準となり得るであろう。少なくとも教員はこのことを知っておかなくてはならない。

- この対応の付け方(写像)自体が大きな問題である。「数えることは写像である」という認識はなかなか難しい。写像の概念をよく知らないまま教壇に上がるようなケースもあるのではないかと危惧する。またこのことは次の「量」の見方とも関連する。
- 助数詞の使用も重要な問題である。小学校においては算数科と国語科は同じ教員によって教えられることが多いため、両科の内容を関連して教えることができるというメリットも考えられるが、どの程度意識されているかという点と心許ない。特に国語科の立場からのアプローチ、たとえば色々な助数詞があるということなどについては、それほど配慮されているようには見えない。教員養成の立場を考えたとき、他の学問分野とも連携が必要なのではないか。

(3) 量としての見方

何らかの測定単位を以て、そのいくつかという対応を付けている。小学校算数科の4分野の一つとして、「B 量と測定」があるように、これは重要なものとして位置づけられている。

- 対応の付け方の段階で、どのような測定単位を採用するかによって状況が異なる。さらに複数の単位を用いて表すこと(例: 1m 20cm など)の指導も、量の直感的な把握には必要であり、十分に行われるべきである。
- 助数詞は測定単位を表わしているとも見ることが出来る。実は歩数も量として測定単位になり得るものだし、ひと山・ふた山という測り方、また最近はあまり用いないが、一尋(ひとひろ)などというのも意外に有意義なものではないかとも考える。言語系、社会科学系の知識が意外に必要なとも言える。

このようにして見ると問題は決して少なくないと思うが、それでも現在小学校算数科低学年においては、この3つが丁寧に教育されていると見て良いだろう。特に体験的な活動を通じて子どもにこれらの見方を体得させるという点に力が注がれていると思われる。その成果は、我が国のほぼすべての成人がこれらの概念を日常生活において使っていることからしても十分であると言って良いだろう。しかしこれが次の段階に進むと、ここで指摘したような見方が出来ているかどうかが必要になってくる。

3 2種類の量から派生して得られる数の概念

基本的な数の概念についての教育がある程度成功していると思われる我が国の算数教育においても、量の概念から派生する多くの新しい概念は、その教育に困難さがあることが数多く知られている。特に、2種類の量の比として得られる概念、言い換えれば「単位量あたり」の概念は、日常生活での有用性もあり小学校で扱われるべき内容である。

具体的には「速さ」「密度・比重」「濃度」「燃費」などがある。しかしそれを厳密に指導するのはなかなか難しい。

本節では小学校6年生「単位量あたり」での実践事例をあげる。算数教科書(啓林館 小学校6年用)におけるこの単元での全体的な指導の流れは以下の通りである。

1. 単元前半は「こみぐあい」の話題を扱う。たたみ1枚あたりの人数と、1人あたりのたたみの枚数を考えることで「こみぐあい」を表現する。
どちらの車が長く走れるか(車の燃費)、人口密度の話題という話題もここで扱う。
2. 単元後半は「速さ」の話題を扱う。毎秒何m走るか、毎時何km走るかという方向で説明が進み、速さと時間と距離の関係式を扱う。

上記の中の下線部の箇所が以下に紹介するA教諭の実践事例である。A教諭の指導の流れを議論する。この事例は典型的な授業展開と考えてよいが、その中に見られる問題点を指摘したい。

A教諭からの最初の提示課題は以下のようなものであった：

AとBの自動車があります。
Aは40リットルで720km走ることができます。
Bは50リットルで800km走ることができます。
どちらの車が経済的でしょう。

この後、線分図を使って解決するという教師の方針で児童が自力解決した。

子ども1の書いた内容は、

| | | |
|----------------------|--------------------|---------|
| A車： $40 \div 40 = 1$ | 720 \div 40 = 18 | 答え 18km |
| B車： $50 \div 50 = 1$ | 800 \div 50 = 16 | 答え 16km |

であり、言葉による説明は

『A車では、40リットルを40で割ったら1だから、720kmを40で割ったら18kmになる。B車では、50リットルを50で割ったら1だから、800kmを50で割ったら16kmになる。だから、A車の方が経済的だ』

というものであった。

つぎに子ども2の書いた内容は、

| | |
|----------------------------------|---------------|
| A車： $40 \div 720 = 0.0555\cdots$ | 答え 0.0556リットル |
| B車： $50 \div 800 = 0.0625$ | 答え 0.0625リットル |

であり、言葉による説明は

『1kmあたり何リットルいるか出しました。A車の方が経済的です』

というものであった。

子ども3の書いた内容は、

| | |
|-------------------------|---------|
| A 車： $720 \div 40 = 18$ | 答え 18km |
| B 車： $800 \div 50 = 16$ | 答え 16km |

であり、言葉による説明は

『1 リットルで何 km すすむか考えました。A 車の方が経済的です』

というものであった。

このような子どもたちの説明に対して、A 教諭の最終的な結論として、子ども 2 と 3 のやり方を「どちらも単位あたりの考え方です」と説明し、「燃費では 1 リットルで走れる距離を表すことが多いです。」というまとめがあった。

上記の子どもたちの説明のうち、子ども 1 の解法で式に単位をつけるなら、

| | |
|---|--------------------------------------|
| A 車では、 $40 \text{ リットル} \div 40 = 1 \text{ リットル}$ | $720\text{km} \div 40 = 18\text{km}$ |
|---|--------------------------------------|

となる。この $\div 40$ は “40 等分” を意味している。

他方、子ども 3 の解法で式に単位をつけるなら、

| |
|--|
| A 車では、 $720\text{km} \div 40 \text{ リットル} = 18\text{km}/\text{リットル}$ |
|--|

となる。この 40 は “40 リットル” を意味している。したがって厳密に言うと、子ども 1 の「答え 18km」という表記は正しいが、子ども 2 の「答え 0.0556 リットル」や子ども 3 の「答え 18km」という表記は誤りである。教科書の記述方法にしたがって、それぞれ

| |
|---|
| 「答え 1km あたり 0.0556 リットル」, 「答え 1 リットルあたり 18km」 |
|---|

とすべきである。この授業(単元)で指導すべき内容は、燃費を表すような「新しい量」の表現である。異なる 2 つの量からつくられる量であり、表現方法も新しいものである。しかし、A 教諭は新しい量の意味や表記方法を正確に伝えることにはそれほど力を入れず、むしろ、A と B 2 車の燃費を比較する手段の議論に力を入れたようである。そのため、子どもたちは口頭の説明では、『1 リットルで何 km すすむか考えました。』と望ましい表現をしながら、板書では「答え 18km」という不十分な表現をしていたのだが、A 教諭は無頓着であった。

この授業実践例を見ると、この教師は「燃費」について、その概念を理解させようとするのではなく、その利用法を教えようとしているように見える。その方が「手を動かす」機会をたくさん設けられるため、授業としても構成しやすく、その場での充実感をもたらされる。しかし本来理解すべきことは概念なのであって、それを用いればより幅広く、深く、確実にその応用が出来るようになる。いわゆる「方法の目的化」になりがちである。数学者としての立場から言えば、この授業を担当する教員には次のような助言をしなくてはならない。

- (1) 燃費くらべや速さくらべは「新しい量」を教えるための手段であって、くらべることが目的ではない。

- (2) 公倍数を用いる等の「一方をそろえて」くらべる方法もあり得るが、それは一方の量のみの比較であって、既習事項で片付く話である。
- (3) この単元では、1あたりで考える場面（～km/Lなどの新しい表現を強調できる場面）をどのように作るかが大切な点となる。子どもの自力解決まかせではなく、教師の意図的な介入が不可欠である。
- (4) いろいろな方法を並べた上で、単位あたりの大きさは「どんな場合にでも使えるので便利だ」という論理は「方便」である。こうした方便を教えるのではなく、新しい量の概念を教える必要がある。
- (5) km/Lというような単位を前面に押し出すことは小学生にとっては容易でないと思われるが、教員の側ははっきり認識しておくべきである。

このようなことは小学校の教員にとってはなかなか理解が難しいものかも知れないが、数学・数学教育の研究者たちがサポートしていくべき問題であり、同時に教員養成において必要なことであると考ええる。また全教科を教えることが出来るという小学校教員の特性を活かし、算数(数学)以外の内容、例えば溶液の色々な濃度、人口密度といった題材を通じて、理科や社会などの教科において扱われることを期待したい。

4 数と量の見方に関するもう一つの立場

4.1 数は量の比である

前節では「2つの異なる種類の量の比」の扱いについて述べたのだが、根はもっと深いところにあるのではないだろうか。量の概念は実用上はとても重要であることは、第2節(3)でも少し述べたのだが、数学者には多くの場合無視されている¹。一方、数学教育においては「量を抽象化したものが数」「数の具体例が量」というように、数と量をある意味では同一視しているようにも見える。だがその曖昧さが算数教育の現場において3節で述べたような問題を起こすのではないだろうか。

このことに対する一つの答えとして、「数は量の比である」とする見方がある。異種の量の比の前に、そもそも数は最初から量の比であって、そもそもは同種の量の比を表すのが数であるという立場である。このことについて、本研究集会(2010.12.6～9)において1970年代の小島順や田村二郎らの議論([1],[3])、また最近の宮下英明[4],[5],[7]の主張などが紹介された。

4.2 比の値について～現場でよく見られる問題

こうした主張は数学者の立場から算数・数学教育を眺めたときにはよく理解できるものであるが、小学校教員にとって難しいものではないかと思われる。このような悲

¹銀林[2]によれば、明治中期にはすでに藤原利喜太郎が「幾何学以外には量の概念は不要、それをすでに達成した」というような趣旨のことを述べているようである。

観的な見解を述べざるを得ないのは、比と比の値について、以下に挙げるような不適切な指導が行われているケースが散見されるからである。「比とその応用」は小学校6年生で取り上げられる。この単元の目標は、

- $a:b$ という比の意味を理解できるようにする
- 等しい比があることを理解できるようにする。

ことである。ここで紹介するのはB教諭の第2時の授業で、目標は「等しい比の意味と表し方の理解」である。すでに前時の授業で、「酢の量とサラダ油の量の割合を60:90のように表します。」という表現を学習している。

授業冒頭の課題提示で、B教諭は酢とサラダ油の量を比の形で、

2:3
60:90
6:9
10:15

のように表した数値を見せて「どれも同じ割合です。」と言い、その上で「2:3と10:15の2つの比の関係を調べよう」という指示をした。子どもたちが、自分たちで考えたことは、

「2に5をかけると10。3に5をかけると15。」

「2:3と10:15は分数として見ると、 $\frac{2}{10}$ と $\frac{3}{15}$ で同じ数になる。」

「 $10 \div 2 = 5$ 。 $15 \div 5 = 3$ 。」

などのほかに、下のような関係図を用いた説明、あるいは縦横にブロックを並べた図的表現を用いた説明(いずれも教師側から用意されたもの)も多く見られた。

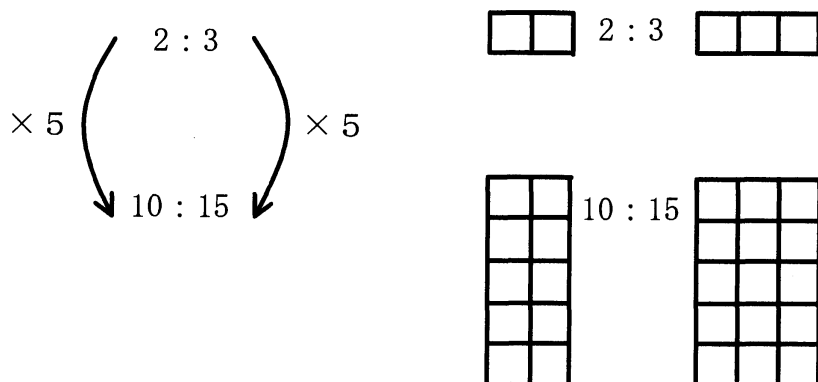


図 1: 問題場面の状況説明

この後B教諭は、子どもたちの方法を説明させたり、別の数値の等しい比で成り立つかなどを確認した。

授業の終わり部分では、B教諭は次のような文章を示して、空白の箇所を子どもたちに書かせた。

『同じ割合になっている2つの比は同じ数を _____ 』

子どもたちの書いた内容は以下のようなものであった：

『かけてもわっても同じになる。』

『かけたりわったりできる。』

『かけたりわったりするとまとめられる。』

『わってもかけても同じ割合になる。』

最終的に教師の示した「解答」は、

『同じ割合になっている2つの比は同じ数をかけたり、同じ数でわったりすればできる。』

というものであった。その後でB教諭は、

『等しい比を書くには、 $2:3=10:15$ とつなぐとよい。』

とまとめた。

以上が、この1時間分の授業のあらすじである。最後の教師からの質問に対する子どもたちの解答内容から見えることは、

- 子どもたちは、同じ数をかける（同じ数で割る）ことによって等しい比を作る方法を学習した。
- 子どもたちは、「比が等しい」ことの意味は学習しなかった。

ということである。この単元の本来の目標は、

- 比の表し方を理解する。
- 等しい比について理解する。

ことである。したがって、教師は「比が等しい」とは何が等しいのかを子どもたちに教えなくてはいけない。

算数の教科書では、「同じ数をかけたり割ったりしてできる比を等しい比という。」という表現で説明されている。これは「比」という“関係”の意味がわかっている前提のもとで、“関係”と“関係”が等しいことを述べている。これは子どもたちにはむづかしい概念であろう。まずは、「比」という“関係”を別のことばで具体的に説明する工夫が必要である。今回の「酢とサラダ油 $2:3$ と $10:15$ 」では、

2:3 とは、サラダ油は酢の 1.5 倍ということだ。
 10:15 とは、サラダ油は酢の 1.5 倍ということだ。
 どちらの場合も、サラダ油は酢の 1.5 倍だ。
 だから 2:3 と 10:15 の比は等しい。

のような説明が必要ではないだろうか。

今回の授業では、“5 倍する”，“5 で割る”などの操作は目にみえるので，子どもたちは手段としてどうすればよいかはわかったと思われる。しかし，「比が等しい」とは何と何が等しいことなのかについては，不明確なままであったと考えられる。B 教諭は，2 つの比が等しいことの概念的な意味を教えないままに，比が等しいことを確認する手段のみを教える結果となった。ここでも前事例と同様，「方法の目的化」が起きている。

4.3 比と割合～カリキュラムに関する問題

もう 1 つの注意すべき点は，5 年生の段階で学習した「割合」との関連である。前節にも述べたように B 教諭は授業冒頭の課題提示で、『どれも同じ割合です。』という発言をしたのだが，その「割合」が授業中の説明ではどこにも関係していなかった。この点に関して，あらためて算数教科書での説明方法や学習指導要領の対応箇所の記述に目を通してみたい。以下，啓林館と東京書籍の算数教科書（いずれも現行のもの（平成 22 年度まで使用のもの）），新学習指導要領対応の啓林館の算数教科書（平成 23 年度以降使用のもの），および新旧学習指導要領での該当箇所の記述を考察する。

4.3.1 現行の教科書 1～啓林館

現行の啓林館の教科書でのこの単元の大きな流れは，「比の意味 → 比の値 → 等しい比」の順である。この教科書では酢と油でドレッシングをつくる話題を用いている。具体的な表現などは以下の通りである。

まず，

酢 30ml とサラダ油 50ml をどのような割合でまぜたといえよかな。

という表現で始まり，

酢の量とサラダ油の割合を 30:50 のように表します。このように表した割合を酢の量とサラダ油の量の比といいます。

と説明する。つづいて，比の値の話題へ入り，

$30 \div 50 = \frac{3}{5}$ で，酢の量はサラダ油の量の $\frac{3}{5}$ 倍になっています。この $\frac{3}{5}$ を，3:5 の比の値といいます。

と説明する。つづいて，等しい比の話題へ入る。

酢とサラダ油の量の比を，10 ml のスプーンの何倍かで比に表しましょう。

という話題があり、『 $30:50=3:5$ 』という表現が出る。つづいて、 $2:3$ と $4:6$ の関係を調べる場面がある。その上で、

□:△の、□と△に同じ数をかけたり、また同じ数でわったりしてできる比はみんな□:△に等しくなります。

とまとめられる。ここでは「割合」という用語を用いて比の説明をしているが、『このように表した割合』という表現は大人レベルの日常表現にも思え、子どもたちにとっては決して5年生で学習した表現方法ではないことに注意が必要である。その後の等しい比の話題では、『酢とサラダ油の量の比を、10mlのスプーンの何倍かで比に表しましょう。』という考え方である。これは、学習指導要領解説書の方針に沿ったものと考えられるが、容易な内容ではなく、直前の比の値が活かされていないことがわかる。5年生での割合と今回の比の用法の共通点や差異についても記述がなく、関連性の不十分な面が感じられる。(注意：新学習指導要領対応の同社の新教科書では改善点が見られ、等しい比の説明に比の値が用いられている。)

4.3.2 現行の教科書2～東京書籍

現行の東京書籍の算数教科書でのこの単元の大きな流れは、「比の意味 → 比の値 → 等しい比」の順である。この教科書でも酢と油でドレッシングをつくる話題を用いている。具体的な表現などは以下の通りである。

まず、酢とオリーブ油の話題で、

10 mlと15 ml、4はいと6はい、80 mlと120 ml はいずれも2と3の割合になっています。

という主旨の説明がなされる。つづいて、

2と3の割合を「:」の記号を使って $2:3$ と表すことがあります。このように表された割合を比といいます。

と説明する。つづいて、5年生で割合を学習した際の事例(勝ち数と全試合数)をあげて、比の値について

「:」の前の数を後ろの数でわった商を、比の値といいます。

と説明する。さらに、

比は、割合を2つの数で表す方法です。5年で習った割合は、割合を1つの数で表す方法です。

と説明する。つづいて、等しい比の話題へ入り、酢とオリーブ油の話題で、 $2:3$ と $10:15$ の関係を調べる場面がある。

□:○の、□と○に同じ数をかけたり、また同じ数でわったりしてできる比を「等しい比」といい、次のように等号で表します。 $2:3=10:15$

とまとめられている。ここでは「割合」という用語を用いた比の説明で始まるが、『2と3の割合』という表現は子どもたちには新しいものであり、5年生で学習した表現方法ではないことに注意が必要である。具体的に3組の数値をあげて共通の性質を見せようとする場面では、比の本質的な性質に迫ろうとする姿勢が見られるが、既に等しい比の話題になっている感もあり、実際の指導の難しさが予想される。等しい比の話題の中では比の値が活かされていないことがわかる。ただし、『比は、割合を2つの数で表す方法です。5年で習った割合は、割合を1つの数で表す方法です。』という説明は重要である。

4.3.3 新学習指導対応の教科書～啓林館

新学習指導要領対応の啓林館の算数教科書での単元の大きな流れは、「比の意味 → 比の値 → 等しい比」の順である。ここでも酢と油でドレッシングをつくる話題を用いている。具体的な表現などは以下の通りである（新版の教科書から単位の表記方法が一部変更されている）。

まず、

酢 30mL とサラダ油 50mL をどのような割合でまぜたといえよですか。

という表現で始まり、

酢の量とサラダ油の割合を 30 : 50 のように表します。このように表した割合を酢の量とサラダ油の量の比といいます。

と説明する。つづいて、比の値の話題へ入り、

酢の量とサラダ油の量の比が 30 : 50 のとき、酢の量はサラダ油の量の何倍になっていますか。

という設問があり、

$30 \div 50 = \frac{3}{5}$ 。 $\frac{3}{5}$ 倍になっています。この $\frac{3}{5}$ を、30 : 50 の比の値といいます。

と説明する。つづいて、等しい比の話題へ入る。長さ 50cm と 150cm の2本の棒の長さとかげの長さを話題としている。

(あ) 40 : 50 $40 \div 50 = \frac{4}{5}$
 (い) 120 : 150 $120 \div 150 = \frac{4}{5}$
 比の値は、どちらも $\frac{4}{5}$ で等しくなっています。2つの比で、それぞれの比の値が等しいとき、2つの比は等しいといいます。

と説明する。そして最終的に、

$a:b$ の両方の数に同じ数をかけたり、両方の数を同じ数でわったりしてできる比は、みんな $a:b$ に等しくなります。

とまとめられる。

ここにみられる『このように表した割合』という表現は、現行の教科書と同様、子どもたちにとっては5年生で学習した表現方法ではない。その後の比の値の説明では、現行のものとは異なり、『酢の量はサラダ油の量の何倍になっていますか。』と表現されていて、考え方が変わっていることがわかる。さらに、その後の等しい比の話題では比の値を用いて説明がなされている。比の値と等しい比の関連付けが見られるなど、新版の教科書では明らかに改善された様子が見られる。

4.3.4 新旧の学習指導要領解説書

現行の学習指導要領原文での該当する箇所は、[D 数量関係]での、

D(1) 簡単な比の意味

(1) 簡単な場合について、比の意味を理解できるようにする。

であり、解説部分には、

この学年では、 $a:b$ という比の意味を理解できるようにする。これに関連し、二つの数量を共通な基準を用いて比較することにより、等しい比があることを理解できるようにする。例えば、 $2dl$ と $6dl$ の液体を、 $1dl$ のコップで測り取れば2杯と6杯であり、 $2dl$ のコップで測り取れば1杯と3杯であることから、 $2:6 = 1:3$ であるとみることができる。

とある。これに対して、新学習指導要領解説書での該当する箇所は、[D 数量関係]での、

D(1) 比

(1) 比について理解できるようにする。

であり、解説部分には、

二つの数量の大きさを比較しその割合を表す場合に、どちらか一方を基準量とすることなく、簡単な整数の組を用いて表す方法が比である。第5学年までに、倍に関する指導、分数の指導、比例関係に関する指導の中で、比の素地となる見方を指導してきている。第6学年では、これらの基礎の上に、 $a:b$ という比の表し方を指導し、比について理解できるようにする。

指導に当たっては、具体的な場面によって、比の相等とそれらの意味について理解させるようにする。例えば、同じ大きさのコップで3杯と5杯の2種類の液体を混ぜ合わせた液体を作ったとき、これと同じ濃さの液体を作るには、6杯と10杯、9杯と15杯など、両者の割合を等しくする必要がある。このことから、 $3:5$ は、 $6:10$ 、 $9:15$ などや、 $1.5:2.5$ などと等しいことを理解させる。

とある。

新旧の記述内容を比較すると、新版では明らかに従来より比の指導に力を入れようとする意向が表れている。さらに、5年生までに学習した内容と6年生での比との関連にも言及している。等しい比については、『両者の割合を等しくする』というキーワード的表現が用いられている。これは、1組の比そのものについての性質を述べるものであり、従来の解説での『1dlのコップで測り取れば...、2dlのコップで測り取れば...』という考え方とは異なり、より具体的でわかりやすいと考えられる。

上述のように、算数教科書では、5年生での「割合」と6年生での「比」の内容の関連性が十分に説明されているとは言い難い面がある。さらに、比の単元の内部でも、比の値と等しい比の関連付けが不十分であったと言えよう。学習指導要領での記述は新版では改善された詳細なものになってはいるが、割合の意味、割合と比の関係等について、まずは教師側の基本的な概念の把握と指導法との対応付けが必要であると言える。

4.4 「数は量の比」と小学校の現状

このような現状を見ると、いきなり「数は量の比である」という概念を現場に持ち込むのは、現在にも増して混乱を引き起こすことになりかねないようにも思われる。当面出来ることとして、教員養成の段階で、この見方を何らかの形で味わわせることとし、学習指導要領の変化に対応できるようにしておくことがもっとも現実的であるというのが、教員養成の立場での一つの結論である。

5 数の見方と演算の関係

数の見方を深める方策として、これまで述べたように直接的にその概念をどうとらえ、どう指導するかということと同時に、子どもたちが数を使っていく上で自然に身につけることを考えることも重要である。その際に有用であると思われるのが、名数をもちいることである。

現行の算数科では概念の把握には助数詞または単位をつけた数(名数)を考えるが、これを式で表現するときには無名数を用いることがほとんどのようである。

例えば、

赤いリンゴが5こと青いリンゴが3こあります。リンゴは全部でなんこあるでしょう。

しき： $5 + 3 = 8$ こたえ 8こ

これを「 $5こ + 3こ = 8こ$ 」とはしないようである。

啓林館の Web サイトではこのことについて次のように解説している。

式は、日常の事象を数の世界へ抽象化したものであるという考えから、無名数式に慣れさせる指導に終始しています。また、名数式ではいけないというわけではありませんが、名数式では、式が複雑になります。しかし、答えについては、名数で答えることが必要です

計算の段階では単位・助数詞を考えず、計算結果が出たところでそれに対して単位・助数詞を与えるというような操作が一般的である。

さらに中学校以上になると始めから単位を表わさない量の表現もある。たとえば

(0,0) (1,1) を対角線とする正方形の一辺の長さは 1, 面積は 1 である

などという。この文の中には「1」という数字は 4 回出てきているが、その数の属性がそれぞれ異なる。座標としての数、長さという量を表す数、面積という量を表す数、となるが、生徒にとってはであるが、どれがどれかわからないのである。そもそも座標平面上では長さには単位を与えないのが普通であり、その積として考えられる面積も単位がない(無名数)である。この概念を把握するには、単位のついた形で量としてその概念を会得したのち、さらにその抽象化として捉える必要がある。

教育の段階として計算の過程だけを取り上げて教えることは当然のことだとは考えるが、その結果、たとえば

例： 3 m と 10 cm を加えて 13

5 m² と 3 m を加えて 8 m

になってしまうようなことに違和感を感じないのは大きな問題である。すなわち現象を抽象的に見て数値として表現するという、数概念の根幹が分かっていないのである。また

例：今日は 25℃ でした。昨日は 23℃ でした。合わせて 48℃ です

というようなことも起きうる。

またさらに、この問題はさらに抽象的な概念に進む段階でさらに厄介な問題となる。例えば、

出したお金 - 代金 = おつり

といった「言葉の式」を考える。これは内容の把握にとっても役に立つ、重要な部分である。例えば新井紀子は [6] では、日本語で書かれた内容を算数・数学の言葉=式=で表現することを「和文数訳」と表現しており、小学校におけるもっとも重要な、しかし難しい内容であるにとらえているようである。

これについて啓林館の Web サイトでは次のように解説している。

これは具体的な事象を「ことば」を通して数量の関係として式にまとめあげていく過程です。ところで、「ことば」は児童にとって抽象度が高く、これを用いて数量の関係を式に表すことは、教師が考えているほど容易ではありません。

認識としては正にその通りなのだが、問題は次である。

次の点に留意して指導に当たるとよいでしょう。

(1) 具体的な操作を取り入れること。

言葉を用いて数量の関係を表すためには、まず具体的な数量の関係を把握させる必要があります。「500 円持っていた」「180 円の牛乳を買った」「おつりは 320 円だった」ということを実際のやりとりを通した操作をさせることです。

(2) 児童の言葉から出発すること

初めは場面に即した児童が発する生の「ことば」で表させます。その後、「500 円が 200 円に」「牛乳がパンに」と場面を変える中で話し合いを進め、次第に一般的な意味を持った言葉へと無理のないように導いていきます。

結局、小手先の指導法の問題として解決させようとしている。そもそも、概念自体が抽象的であるのに、上辺の指導法だけで片付ける問題であるとしている。本来は式の概念や道具立てが問題である。むしろ最初から式は「言葉の式」を意識して教え続けることが大切なのではないか。出来るだけ無名数を使わない方が良いのではないか。

「計算は出来るが／基礎はわかるが、応用が出来ない」

という主張をよく聞くのだが、それは基礎がわかっているわけではなく、そもそもの「数とは？」「式とは？」という基礎的な事柄がわかっていないのではないだろうか。出来ないのは「応用問題」ではなく「文章問題」である。この部分にはこれまで様々な指導法が研究されてきたようだが、決定的なものは寡聞にして知らない。そのことに終止符を打つべく、こういう数学の基本的な道具立てを改めて認識し直すことが大切なのではないかと考える。

参考文献

- [1] 小島 順 “量の計算を見直す 1 教科書の中の量” 数学セミナー 189(1977) pp.37-42
- [2] 銀林 浩 “発生的立場からも考えよう” 数学セミナー 195(1978) pp.27-31
- [3] 田村二郎 “量と数の理論 I～ ”, 数学セミナー 196～199 (1978)
- [4] 宮下英明 “「1 とみる」の数学”, 日本数学教育学会誌 算数教育 90-12(2008), pp.25-29
- [5] 宮下英明 “量計算の数学 ” 日本数学教育学会誌 算数教育 91-8 (2009) pp.31-36
- [6] 新井紀子「数学は言葉」東京図書 (2009)

- [7] 宮下英明 “数と量の指導 ” 著者 Web サイト
<http://m-ac.jp/me/instruction/subjects/number/>
- [8] 新興出版 啓林館 Web サイト解説 「名数・無名数」
http://www.shinko-keirin.co.jp/sansu/WebHelp/html/page/10/10_08.htm
- [9] 同 「ことばの式」
http://www.shinko-keirin.co.jp/sansu/WebHelp/html/page/42/42_05.htm